

Zbirka nalog iz geometrijske topologije

Definicije

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

- 1.1 *Topološki prostor* je množica X skupaj z družino podmnožic $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, ki jim pravimo *odprte množice*. Zanje mora veljati:
 - (i) Množici \emptyset in X sta odprti.
 - (ii) Unija poljubne družine odprtih množic je odprta množica.
 - (iii) Presek dveh odprtih množic je odprta množica.Družino \mathcal{T} imenujemo tudi *topologija*.
- 1.2 Množica F v topološkem prostoru X je *zaprt*, če je njen komplement odprta množica.
- 1.3 Množica $A \subset X$ je *okolica* točke x v prostoru X , če A vsebuje kako odprto množico, ki vsebuje x .
- 1.4
 - (i) Točka x je *izolirana točka* prostora X , če je enojec $\{x\}$ odprta množica.
 - (ii) Točka $x \in X$ je *stekališče* množice A , če vsaka okolica točke x seka množico $A - \{x\}$. Množico vseh stekališč množice A označimo z A' in jo imenujemo *izpeljana množica*.
 - (iii) *Zaprtje* množice A v X je presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A . To je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A , in jo označimo $\text{Cl} A = \text{Cl}_X(A) = \bar{A}$.
 - (iv) *Notranjost* množice A v X je unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v A . To je največja odprta množica vsebovana v A in jo označimo $\text{Int}(A) = \text{Int}_X(A) = \overset{\circ}{A}$.
 - (v) *Rob* ali *meja* množice A je $\text{Meja}(A) = \text{Meja}_X(A) := \text{Cl} A - \text{Int} A$.
- 1.5 Denimo, da sta \mathcal{T} in \mathcal{T}' dve topologiji na množici X . Če je \mathcal{T}' (strogo) vsebovana v \mathcal{T} , pravimo, da je topologija \mathcal{T} (*strogo*) *močnejša* od topologije \mathcal{T}' , topologija \mathcal{T}' pa (*strogo*) *šibkejša* od \mathcal{T} .
- 1.6 Naj bo X metrični prostor. Množica $U \subset X$ je odprta v *metrični topologiji*, če je unija (nekaterih) odprtih krogel. Družina vseh odprtih krogel je standardna baza metrične topologije.
- 1.7 Topološki prostor je *metrizabilen*, če je njegova topologija natanko metrična topologija za neko metriko.

1.2 Zvezne preslikave

- 1.8 Naj bosta X in Y topološka prostora. Preslikava $f: X \rightarrow Y$ je *zvezna*, če je praslika vsake odprte množice v Y odprta v X .
- 1.9 Preslikava $f: X \rightarrow Y$ je *zvezna v točki* $x \in X$, če je praslika vsake okolice točke $f(x)$ okolica točke x .

1.3 Homeomorfizmi

- 1.10 Preslikava $f: X \rightarrow Y$ je *odprta* (*zaprt*), če je slika vsake odprte (zaprte) množice v X odprta (zaprta) v Y .
- 1.11 Preslikava $f: X \rightarrow Y$ je *homeomorfizem*, če je zvezna bijekcija z zveznim inverzom. Prostora X in Y sta *homeomorfn*, če obstaja kak homeomorfizem $X \rightarrow Y$. Pišemo $X \approx Y$.

1.4 Baze in podbaze

- 1.12 Družina $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ je *baza topologije* \mathcal{T} , če je vsaka članica družine \mathcal{T} unija kake poddružine družine \mathcal{B} .
- 1.13 Družina podmnožic množice X je *pokritje* podmnožice $A \subset X$, če je A vsebovana v uniji te družine.
- 1.14 Družina $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ prostora X je *podbaza* topologije \mathcal{T} , če preseki vseh končnih poddružin družine \mathcal{P} sestavljajo bazo.
- 1.15 Podmnožica $D \subset X$ je *gosta* v prostoru X , če D seka vsako neprazno odprto množico.
- 1.16 Družina \mathcal{B}_x okolic točke $x \in X$ je *baza okolic* točke x , če vsaka okolica U točke x vsebuje kakšno okolico $V \in \mathcal{B}_x$.
- 1.17 Prostor X ustreza *prvemu aksiomu števnosti* (je 1-števen), če ima vsaka točka $x \in X$ kako števno bazo okolic.
- 1.18 Prostor X ustreza *drugemu aksiomu števnosti* (je 2-števen), če ima kako števno bazo topologije.
- 1.19 Prostor X je *separabilen*, če vsebuje kako števno gosto množico.
- 1.20 Naj bo $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ družina topoloških prostorov, $X := \prod_\alpha X_\alpha$ kartezični produkt in $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ kanonična projekcija. *Produktna topologija* na X je podana s podbazo, ki jo tvorijo vse praslike $p_\alpha^{-1}(U)$, kjer sta $\alpha \in A$ in U odprta v X_α .

1.5 Podprostori

- 1.21 Naj bo \mathcal{T} topologija na X in naj bo $Y \subset X$. *Inducirana topologija* na Y je topologija $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$. Če Y opremimo z inducirano topologijo, pravimo, da je *podprostor* prostora X .
- 1.22 Družina podmnožic prostora X je *lokalno končna*, če ima vsaka točka v X kako okolico, ki seka le končno mnogo članic družine.

2 Topološke lastnosti

2.1 Ločljivost (separacijske lastnosti)

- 2.1 *Aksiomi ločljivosti (separacijski aksiomi)* T_0, T_1, T_2, T_3 in T_4 :
 - (i) Prostor X zadošča aksiomu T_0 , če za poljubni različni točki $x, y \in X$ obstaja okolica točke x , ki ne vsebuje točke y , ali okolica točke y , ki ne vsebuje točke x .
 - (ii) Prostor X zadošča aksiomu T_1 , če za poljubni različni točki $x, y \in X$ obstaja okolica točke x , ki ne vsebuje točke y .
 - (iii) Prostor X zadošča aksiomu T_2 (pravimo, da je X *Hausdorffov prostor*), če imata poljubni različni točki disjunktni okolici.
 - (iv) Prostor X zadošča aksiomu T_3 , če za vsako točko $x \in X$ in za vsako zaprto množico $A \subset X$, ki ne vsebuje x , obstajata disjunktni okolici.
 - (v) Prostor X zadošča aksiomu T_4 , če za vsaki dve zaprti disjunktni množici obstajata disjunktni okolici.
 - (vi) Prostor je *regularen*, če zadošča aksiomoma T_1 in T_3 .
 - (vii) Prostor je *normalen*, če zadošča aksiomoma T_1 in T_4 .

2.2 Povezanost

- 2.2 Prostor X je *nepovezan*, če je unija dveh nepraznih odprtih disjunktnih podmnožic. V nasprotnem primeru je prostor X *povezan*. Podmnožica $B \subset X$ je *povezana*, če je podprostor B povezan prostor.
- 2.3 *Komponenta za povezanost* prostora X , je maksimalna povezana podmnožica v X .
- 2.4 Prostor je *popolnoma nepovezan*, če so vse komponente enojci.
- 2.5 Prostor je *lokalno povezan*, če ima kako bazo iz povezanih množic.
- 2.6 Naj bosta $x, y \in X$ poljubni točki. *Pot* od x do y je taka zvezna preslikava $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow X$, da je $\gamma(0) = x$ in $\gamma(1) = y$.
- 2.7 Prostor X je *s potmi povezan*, če za vsaki točki $x, y \in X$ obstaja pot od x do y .
- 2.8 Prostor X je *lokalno s potmi povezan*, če ima kako bazo, ki jo sestavljajo s potmi povezane množice.

2.3 Kompaktnost

- 2.9 Prostor X je *kompakten*, če ima vsako odprto pokritje prostora X kako končno podpokritje. Množica $K \subset X$ je kompaktna, če je podprostor K kompakten topološki prostor.
- 2.10 Prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka prostora kako kompaktno okolico.
- 2.11 *Kompaktifikacija prostora* X z *eno točko* je topološki prostor $X^+ := X \cup \{\infty\}$ ($\infty \notin X$), kjer je topologija podana na naslednji način: $U \subset X^+$ je odprta, če $\infty \notin U$ in je U odprta v X ali če $\infty \in U$ in je $X^+ - U$ kompaktna in zaprta v X . V teoriji kompaktifikacij inkluzijsko preslikavo $X \hookrightarrow X^+$ štejemo kot del strukture.

3 Prostori preslikav

3.1 Topologije na prostorih preslikav

- 3.1 Označimo s $C(X, Y)$ množico vseh zveznih preslikav iz X v Y in z $G(A, B) := \{f \in C(X, Y) \mid f(A) \subset B\}$. *Kompaktno-odprta topologija* na prostoru $C(X, Y)$ je določena s podbazo, sestavljeno iz množic $G(K, V)$, za vse kompaktne množice $K \subset X$ in vse odprte množice $V \subset Y$.

3.2 Preslikave na normalnih prostorih

- 3.2 Prostor Y je *absolutni ekstenzor* za normalne prostore, če za vsak normalen prostor X , za vsako zaprto podmnožico $A \subset X$ in vsako zvezno preslikavo $f: A \rightarrow Y$, obstaja zvezna preslikava $F: X \rightarrow Y$, ki je *razširitev* za f : velja $F(x) = f(x)$ za vse $x \in A$.
- 3.3 Naj bo $A \subset X$ podprostor. Preslikava $r: X \rightarrow A$ je *retrakcija*, če je zvezna in velja $r(x) = x$ za vse $x \in A$. Če obstaja kaka retrakcija $X \rightarrow A$, je A *retrakt* prostora X .

4 Kvocientni prostori

- 4.1 Surjektivna preslikava $f: X \rightarrow Y$ je *kvocientna*, če velja: $V \subset Y$ je odprta natanko tedaj, ko je odprta $f^{-1}(V) \subset X$.
- 4.2 Naj bo X topološki prostor, \sim ekvivalenčna relacija na X in $q: X \rightarrow X/\sim$ kanonična projekcija v množico ekvivalenčnih razredov. *Kvocientna topologija* na X/\sim je podana z zahtevo, da je q kvocientna preslikava. Prostoru X/\sim pravimo *kvocientni prostor* prostora X po relaciji \sim , preslikavi q pa *kvocientna projekcija*.
- 4.3 Naj bo $q: X \rightarrow X/\sim$ kvocientna projekcija. Za dano množico $B \subset X$ imenujemo $q^{-1}(q(B))$ *nasičenje* množice B .
- 4.4 Naj bo $A \subset X$ in $f: A \rightarrow Y$ zvezna. *Zlepek* $X \cup_f Y$ je kvocientni prostor disjunktni unije $X \amalg Y$ po najmanjši ekvivalenčni relaciji \sim , za katero je $a \sim f(a)$ za vse $a \in A$.

5 Topološke grupe

- 5.1 *Topološka grupa* je topološki prostor G s strukturo grupe, pri čemer sta množenje $G \times G \rightarrow G$ in invertiranje $G \rightarrow G$ zvezni preslikavi.
- 5.2 *Levo delovanje* grupe G na topološkem prostoru X je predpis $G \times X \rightarrow X$, ki paru (g, x) priredi element $g \bullet x$, da za vse $x \in X$ in vse $g, h \in G$ velja
 - (i) $(g \bullet (h \bullet x)) = (gh) \bullet x$,
 - (ii) $e \bullet x = x$, kjer je e enota grupe G ,
 - (iii) $y \mapsto g \bullet y$ je zvezna preslikava iz X v X .
- 5.3 Naj grupa G deluje na topološkem prostoru X . Na X definiramo ekvivalenčno relacijo \sim s predpisom: $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja $g \in G$, da je $g \bullet x = y$. Kvocientni prostor X/\sim imenujemo *prostor orbit* in ga označimo X/G .

6 Evklidski prostori in mnogoterosti

- 6.1 Preslikavi $f, g: X \rightarrow Y$ sta *homotopni*, če obstaja taka zvezna preslikava $H: X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$, da je $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$. Preslikava H se imenuje *homotopija*, homotopnost dveh preslikav pa označimo z $f \simeq g$.
- 6.2 *Topološka k-sfera* je prostor, homeomorfen \mathbb{S}^k .
- 6.3 *Topološka mnogoterost razsežnosti* n (krajše *n-mnogoterost*) je tak 2-števen Hausdorffov prostor M , v katerem ima vsaka točka odprto okolico, ki je homeomorfn \mathbb{R}^n ali pa \mathbb{R}_+^n .
- 6.4 Naj bo M *n-mnogoterost*. Točka $x \in M$ je *notranja*, če ima kako odprto okolico, homeomorfno \mathbb{R}^n . Točka $x \in M$ je *robna*, če ni notranja. Množico vseh notranjih točk imenujemo *notranjost* mnogoterosti M in označimo *int* M , množico vseh robnih in brez mnogoterosti M in označimo *∂* M . Mnogoterost je *sklenjena*, če je kompaktna in brez robov.
- 6.5 *Ploskev* je povezana 2-mnogoterost.