Zbirka nalog iz geometrijske topologije

Definicije

1 Prostori in preslikave

1.1 Topološki prostori

1.1 *Topološki prostor* je množica X skupaj z družino podmnožic $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, ki jim pravimo *odprte množice*. Zanje mora veljati:

(i) Množici $\emptyset$ in X sta odprti.

(ii) Unija poljubne družine odprtih množic je odprta množica.

(iii) Presek dveh odprtih množic je odprta množica.

Družino $\mathcal{T}$ imenujemo tudi *topologija*.

1.2 Množica F v topološkem prostoru X je *zaprta*, če je njen komplement odprta množica.

1.3 Množica $A \subset X$ je *okolica* točke x v prostoru X, če A vsebuje kako odprto množico, ki vsebuje x.

1.4 (i) Točka x je *izolirana točka* prostora X, če je enojec $\{x\}$ odprta množica.

(ii) Točka $x \in X$ je *stekališče* množice A, če vsaka okolica točke x seka množico $A - \{x\}$. Množico vseh stekališč množice A označimo z A' in jo imenujemo *izpeljana množica*.

(iii) *Zaprtje* množice A v X je presek vseh zaprtih množic, ki vsebujejo A. To je najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A, in jo označimo $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl}_X(A) = \bar{A}$.

(iv) *Notranjost* množice A v X je unija vseh odprtih množic, ki so vsebovane v A. To je največja odprta množica vsebovana v A in jo označimo $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}_X(A) = \mathring{A}$.

(v) *Rob* ali *meja* množice A je $\operatorname{Meja}(A) = \operatorname{Meja}_X(A) := \operatorname{Cl} A - \operatorname{Int} A$.

1.5 Denimo, da sta $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ dve topologiji na množici X. Če je $\mathcal{T}'$ (strogo) vsebovana v $\mathcal{T}$, pravimo, da je topologija $\mathcal{T}$ (*strogo*) *močnejša* od topologije $\mathcal{T}'$, topologija $\mathcal{T}'$ pa (*strogo*) *šibkejša* od $\mathcal{T}$.

1.6 Naj bo X metrični prostor. Množica $U \subset X$ je odprta v *metrični topologiji*, če je unija (nekaterih) odprtih krogel. Družina vseh odprtih krogel je standardna baza metrične topologije.

1.7 Topološki prostor je *metrizabilen*, če je njegova topologija natanko metrična topologija za neko metriko.

1.2 Zvezne preslikave

1.8 Naj bosta X in Y topološka prostora. Preslikava $f\colon X \to Y$ je *zvezna*, če je praslika vsake odprte množice v Y odprta v X.

1.9 Preslikava $f\colon X \to Y$ je *zvezna v točki* $x \in X$, če je praslika vsake okolice točke $f(x)$ okolica točke x.

1.3 Homeomorfizmi

1.10 Preslikava $f\colon X \to Y$ je *odprta* (*zaprta*), če je slika vsake odprte (zaprte) množice v X odprta (zaprta) v Y.

1.11 Preslikava $f\colon X \to Y$ je *homeomorfizem*, če je zvezna bijekcija z zveznim inverzom. Prostora X in Y sta *homeomorfna*, če obstaja kak homeomorfizem $X \to Y$. Pišemo $X \approx Y$.

1.4 Baze in podbaze

1.12 Družina $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ je *baza topologije* $\mathcal{T}$, če je vsaka članica družine $\mathcal{T}$ unija kake poddružine družine $\mathcal{B}$.

1.13 Družina podmnožic množice X je *pokritje* podmnožice $A \subset X$, če je A vsebovana v uniji te družine.

1.14 Družina $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$ prostora X je *podbaza* topologije $\mathcal{T}$, če preseki vseh končnih poddružin družine $\mathcal{P}$ sestavljajo bazo.

1.15 Podmnožica $D \subset X$ je *gosta* v prostoru X, če D seka vsako neprazno odprto množico.

1.16 Družina $\mathcal{B}_x$ okolic točke $x \in X$ je *baza okolic* točke x, če vsaka okolica U točke x vsebuje kakšno okolico $V \in \mathcal{B}_x$.

1.17 Prostor X ustreza *prvemu aksiomu števnosti* (je 1-števen), če ima vsaka točka $x \in X$ kako števno bazo okolic.

1.18 Prostor X ustreza *drugemu aksiomu števnosti* (je 2-števen), če ima kako števno bazo topologije.

1.19 Prostor X je *separabilen*, če vsebuje kako števno gosto množico.

1.20 Naj bo $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ družina topoloških prostorov, $X := \prod_\alpha X_\alpha$ kartezični produkt in $p_\alpha \colon X \to X_\alpha$ kanonična projekcija. *Produktna topologija* na X je podana s podbazo, ki jo tvorijo vse praslike $p_\alpha^{-1}(U)$, kjer sta $\alpha \in A$ in U odprta v X_α.

1.5 Podprostori

1.21 Naj bo $\mathcal{T}$ topologija na X in naj bo $Y \subset X$. *Inducirana topologija* na Y je topologija $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$. Če Y opremimo z inducirano topologijo, pravimo, da je *podprostor* prostora X.

1.22 Družina podmnožic prostora X je *lokalno končna*, če ima vsaka točka v X kako okolico, ki seka le končno mnogo članic družine.

2 Topološke lastnosti

2.1 Ločljivost (separacijske lastnosti)

2.1 *Aksiomi ločljivosti (separacijski aksiomi)* T_0, T_1, T_2, T_3 in T_4:

(i) Prostor X zadošča aksiomu T_0, če za poljubni različni točki $x, y \in X$ obstaja okolica točke x, ki ne vsebuje točke y, ali okolica točke y, ki ne vsebuje točke x.

(ii) Prostor X zadošča aksiomu T_1, če za poljubni različni točki $x, y \in X$ obstaja okolica točke x, ki ne vsebuje točke y.

(iii) Prostor X zadošča aksiomu T_2 (pravimo, da je X *Hausdorffov prostor*), če imata poljubni različni točki disjunktni okolici.

(iv) Prostor X zadošča aksiomu T_3, če za vsako točko $x \in X$ in za vsako zaprto množico $A \subset X$, ki ne vsebuje x, obstajata disjunktni okolici.

(v) Prostor X zadošča aksiomu T_4, če za vsaki dve zaprti disjunktni množici obstajata disjunktni okolici.

(vi) Prostor je *regularen*, če zadošča aksiomoma T_1 in T_3.

(vii) Prostor je *normalen*, če zadošča aksiomoma T_1 in T_4.

2.2 Povezanost

2.2 Prostor X je *nepovezan*, če je unija dveh nepraznih odprtih disjunktnih podmnožic. V nasprotnem primeru je prostor X *povezan.* Podmnožica $B \subset X$ je povezana, če je podpodprostor B povezan prostor.

2.3 *Komponenta za povezanost* prostora X, je maksimalna povezana podmnožica v X.

2.4 Prostor je *popolnoma nepovezan*, če so vse komponente enojci.

2.5 Prostor je *lokalno povezan*, če ima kako bazo iz povezanih množic.

2.6 Naj bosta $x, y \in X$ poljubni točki. *Pot* od x do y je taka zvezna preslikava $\gamma \colon \mathbb{I} \to X$, da je $\gamma(0) = x$ in $\gamma(1) = y$.

2.7 Prostor X je *s potmi povezan*, če za vsaki točki $x, y \in X$ obstaja pot od x do y.

2.8 Prostor X je *lokalno s potmi povezan*, če ima kako bazo, ki jo sestavljajo s potmi povezane množice.

2.3 Kompaktnost

2.9 Prostor X je *kompakten*, če ima vsako odprto pokritje prostora X kako končno podpokritje. Množica $K \subset X$ je kompaktna, če je podprostor K kompakten topološki prostor.

2.10 Prostor je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka prostora kako kompaktno okolico.

2.11 *Kompaktifikacija prostora X z eno točko* je topološki prostor $X^+ := X \cup \{\infty\}$ ($\infty \notin X$), kjer je topologija podana na naslednji način: $U \subset X^+$ je odprta, če $\infty \notin U$ in je U odprta v X ali če $\infty \in U$ in je $X^+ - U$ kompaktna in zaprta v X. V teoriji kompaktifikacij inkluzijsko preslikavo $X \hookrightarrow X^+$ štejemo kot del strukture.

3 Prostori preslikav

3.1 Topologije na prostorih preslikav

3.1 Označimo s $C(X,Y)$ množico vseh zveznih preslikav iz X v Y in z $G(A,B) := \{f \in C(X,Y) \mid f(A) \subset B\}$. *Kompaktno-odprta topologija* na prostoru $C(X,Y)$ je določena s podbazo, sestavljeno iz množic $G(K,V)$, za vse kompaktne množice $K \subset X$ in vse odprte množice $V \subset Y$.

3.2 Preslikave na normalnih prostorih

3.2 Prostor Y je *absolutni ekstenzor* za normalne prostore, če za vsak normalen prostor X, za vsako zaprto podmnožico $A \subset X$ in vsako zvezno preslikavo $f\colon A \to Y$, obstaja zvezna preslikava $F\colon X \to Y$, ki je *razširitev* za f: velja $F(x) = f(x)$ za vse $x \in A$.

3.3 Naj bo $A \subset X$ podprostor. Preslikava $r\colon X \to A$ je*retrakcija*, če je zvezna in velja $r(x) = x$ za vse $x \in A$. Če obstaja kaka retrakcija $X \to A$, je A *retrakt* prostora X.

4 Kvocientni prostori

4.1 Surjektivna preslikava $f\colon X \to Y$ je *kvocientna*, če velja: $V \subset Y$ je odprta natanko tedaj, ko je odprta $f^{-1}(V) \subset X$.

4.2 Naj bo X topološki prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $q\colon X \to X/\!\sim$ kanonična projekcija v množico ekvivalenčnih razredov. *Kvocientna topologija* na $X/\sim$ je podana z zahtevo, da je q kvocientna preslikava. Prostoru $X/\!\sim$ pravimo *kvocientni prostor* prostora X po relaciji $\sim$, preslikavi q pa *kvocientna projekcija*.

4.3 Naj bo $q\colon X \to X/\!\sim$ kvocientna projekcija. Za dano množico $B \subset X$ imenujemo $q^{-1}(q(B))$ *nasičenje* množice B.

4.4 Naj bo $A \subset X$ in $f\colon A \to Y$ zvezna. *Zlepek* $X \cup_f Y$ je kvocientni prostor disjunktne unije $X \coprod Y$ po najmanjši ekvivalenčni relaciji $\sim$, za katero je $a \sim f(a)$ za vse $a \in A$.

5 Topološke grupe

5.1 *Topološka grupa* je topološki prostor G s strukturo grupe, pri čemer sta množenje $G \times G \to G$ in invertiranje $G \to G$ zvezni preslikavi.

5.2 *Levo delovanje* grupe G na topološkem prostoru X je predpis $G \times X \to X$, ki paru (g,x) priredi element $g \bullet x$, da za vse $x \in X$ in vse $g,h \in G$ velja

(i) $(g \bullet (h \bullet x)) = (gh) \bullet x$,

(ii) $e \bullet x = x$, kjer je e enota grupe G,

(iii) $y \mapsto g \bullet y$ je zvezna preslikava iz X v X.

5.3 Naj grupa G deluje na topološkem prostoru X. Na X definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ s predpisom: $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja $g \in G$, da je $g \bullet x = y$. Kvocientni prostor $X/\sim$ imenujemo *prostor orbit* in ga označimo X/G.

6 *Evklidski prostori in mnogoterosti*

6.1 Preslikavi $f, g\colon X \to Y$ sta *homotopni*, če obstaja taka zvezna preslikava $H\colon X \times \mathbb{I} \to Y$, da je $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$. Preslikava H se imenuje *homotopija*, homotopnost dveh preslikav pa označimo z $f \simeq g$.

6.2 *Topološka k-sfera* je prostor, homeomorfen $\mathbb{S}^k$.

6.3 *Topološka mnogoterost* razsežnosti n (krajše n-mnogoterost) je tak 2-števen Hausdorffov prostor M, v katerem ima vsaka točka odprto okolico, ki je homeomorfna $\mathbb{R}^n$ ali pa $\mathbb{R}^n_+$.

6.4 Naj bo M n-mnogoterost. Točka $x \in M$ je *notranja*, če ima kako odprto okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^n$. Točka $x \in M$ je *robna*, če ni notranja. Množico vseh notranjih točk imenujemo *notranjost* mnogoterosti M in označimo $\operatorname{int} M$, množico vseh robnih pa *rob* mnogoterosti M in označimo ∂M.
Mnogoterost je *sklenjena*, če je kompaktna in brez roba.

6.5 *Ploskev* je povezana 2-mnogoterost.